MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

N désigne, dans tout le texte, un entier fixé, strictement supérieur à 1.

I

Soit S un entier vérifiant $0 < S < N$. On pose, pour tout x réel, positif ou nul, différent de 1 :

$$f_S(x) = \frac{x^S - 1}{x^N - 1}$$

1° Montrer que $f_S(x)$ a une limite L quand x tend vers 1.

On pose $f_S(1) = L$; on définit ainsi une application f_S de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.

2° Montrer l'existence de la dérivée $f'_S(1)$ et calculer sa valeur.

3° Montrer que, pour tout x positif et différent de 1, $f'_S(x)$ est du signe de $g(x) = Nx^{N-S} - (N-S)x^N - S$. Trouver le sens de variation de g, puis celui de f_S.

4° Trouver une relation simple entre $f_{N-S}(x)$ et $f_S\left(\frac{1}{x}\right)$ vérifiée pour tout x strictement positif.

II

Soit α un nombre réel vérifiant $0 < \alpha < 1$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant :

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbf{N}^*, \text{ on a } u_n = \alpha u_{n+1} + (1-\alpha)\, u_{n-1}. \end{cases}$

1° Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique ; calculer sa raison x en fonction de α.

2° On pose $u_1 = \lambda$. Exprimer u_n en fonction de λ, de x et de n; examiner le cas particulier $x = 1$.

3° On suppose en outre que $u_N = 1$. Calculer λ et déterminer u_n en fonction de α et de n ; cas particulier $x = 1$.

III

Soit ξ une expérience ayant deux résultats possibles, A avec la probabilité α et B avec la probabilité $1 - \alpha$. Un joueur répète l'expérience ξ, les différents résultats étant indépendants. Il gagne 1 franc chaque fois que le résultat est A; et il perd 1 franc chaque fois que le résultat est B. La somme dont il dispose au départ est S francs.

Il décide de s'arrêter soit lorsqu'il a tout perdu (il est alors ruiné), soit lorsqu'il possède au total la somme de N francs ($0 < S < N$).

Soit $p(S)$ la probabilité pour qu'il atteigne son objectif de N francs, et $q(S)$ la probabilité pour qu'il soit ruiné.

1° En considérant les éventualités possibles après la première expérience, trouver une relation entre $p(S)$, $p(S+1)$, $p(S-1)$ d'une part, et une relation entre $q(S)$, $q(S+1)$, $q(S-1)$ d'autre part ($0 < S < N$).

2° Calculer $p(S)$ et $q(S)$ à l'aide des résultats de la seconde partie. Que dire de $p(S) + q(S)$ et que signifie le résultat trouvé?

3° Dans le cas $\alpha = \frac{18}{37}$, calculer, avec la précision autorisée par les tables de logarithmes, une valeur approchée de $p(S)$ dans les trois cas suivants :

a. $S = 10$ et $N = 20$

b. $S = 50$ et $N = 100$

c. $S = 80$ et $N = 100$

4° On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$, $S = 3$, $N = 5$; calculer :

— la probabilité pour qu'en dix coups au plus, le joueur ait gagné;

— la probabilité pour qu'en dix coups au plus le joueur soit ruiné;

— la probabilité pour que le joueur doive faire au moins un onzième coup.

N.B. — *Cette question* III, 4° *peut être traitée indépendamment des questions* III, 1°, 2° et 3°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail